【１８】

2 変数 x, y が

$$x \geqq 0 \quad かつ \quad y \geqq 0 \quad かつ \quad x+y \leqq 3$$

を満たしながら変わるとき，

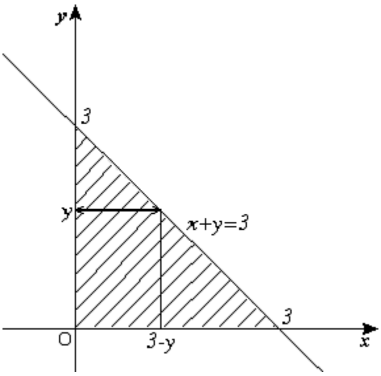
$$z = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x - 2y + 6$$

の最小値を求めよ．

＜考え方＞

z には，対称性も何もないので，一文字固定して仮の最小値を定め，固定を解除して真の最大値を求めるという方法を用います．

（解答）$x \geqq 0, y \geqq 0, x+y \leqq 3$ を図示すると次のようになる．



Step1　y を固定する．

y を固定したときの x の変域は，上図より，

$0 \leqq x \leqq 3-y$

である．z を x についてまとめて，

$z = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x - 2y + 6$

$= x^2 - 2(y+1)x + 2y^2 - 2y + 6$

$= \{x - (y+1)\}^2 + y^2 - 4y + 5 \cdots ①$

(i)3-$y \leqq y+1$，即ち，$1 \leqq y \leqq 3$ のとき

最小値は，$x = 3-y$ のとき．① に代入して，

$z = \{3 - y - (y+1)\}^2 + y^2 - 4y + 5$

$= 4(y^2 - 2y + 1) + y^2 - 4y + 5$

$= 5y^2 - 12y + 9$

$= 5\left(y - \dfrac{6}{5}\right)^2 + \dfrac{9}{5}$

(ii)$y+1 \leqq 3-y$，即ち，$0 \leqq y \leqq 1$ のとき

最小値は，$x = y+1$ のとき．① に代入して，

$z = y^2 - 4y + 5$

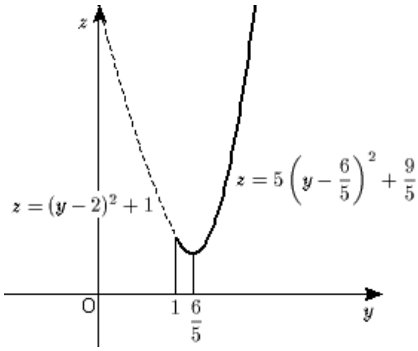
$= (y-2)^2 + 1$

Step2　y を変化させる．

(i),(ii) より，z の最大値は，

$$\begin{cases} (y-2)^2 + 1 & (0 \leqq y \leqq 1) \\ 5\left(y - \dfrac{6}{5}\right)^2 + \dfrac{9}{5} & (1 \leqq y \leqq 3) \end{cases}$$

これを実際に図示すると，



ただし，破線は，$z = (y-2)^2 + 1$ を，実線は，$z = 5\left(y - \dfrac{6}{5}\right)^2 + \dfrac{9}{5}$ である．よって，グラフより，z の最小値は，$y = \dfrac{6}{5}$ のときで，

$\dfrac{9}{5}$

である．